

**Les ventes de produits innovants à la mode sont-elles chaotiques ? Le cas
des ventes de *Game Boy* au Japon.**

Bonache Adrien*

Allocataire-moniteur normalien
Université de sciences et techniques de Montpellier.
Place Eugène Bataillon, 34000 Montpellier
04.99.92.05.23
bonache@rip.ens-cachan.fr

* Nous tenons à remercier le Professeur Yves DUPUY, Karen MORIS et les deux rapporteurs anonymes pour leurs excellentes remarques et critiques. Les éventuelles erreurs relèvent de la seule responsabilité de l'auteur.

Les ventes de produits innovants à la mode sont-elles chaotiques ? Le cas des ventes de *Game Boy* au Japon.

Résumé: La présente communication a pour objet de tester les conclusions de l'article de Granovetter et Soong (1986). Elle testera l'hypothèse du caractère déterministe cyclique ou chaotique des ventes de produits innovants et/ou de mode sur la base des ventes hebdomadaires de « Game Boy » au Japon de 1989 à 2005.

Mots clefs: Chaos, test BDS, exposant de Lyapunov, plus proche voisin, prévision des ventes.

Introduction

Le lancement de produits innovants ou de mode semble comprendre plus de risques que la vente de produits ordinaires. Par exemple, sur un marché déjà existant, il paraît plus simple de fixer le prix en fonction des standards observables sur le marché. Par contre, lorsque l'on lance un bien nouveau, il se peut que ses qualités ne soient pas perçues immédiatement par les consommateurs ou que l'entreprise productrice fixe un prix trop élevé eu égard à la valeur attribuée par les consommateurs au produit.

La PlayStation 3 de Sony peut éventuellement illustrer ce type de problèmes. En effet, avec un coût de production estimé à près de 800 euros sur un marché où les consoles dernières générations de ses concurrents s'achetaient, en 2006, entre 300 et 400 euros, le constructeur de console de jeux vidéos japonais Sony semblait devoir vendre à perte.

Il y a de nombreux intérêts pratiques sous-jacents à l'étude de la vente de produits de mode innovants : l'effet de mode rend-il les ventes plus ou moins sensibles au prix ? Si la consommation de ce type de biens est ostentatoire, alors un prix élevé pourrait attirer certains agents que l'on ne serait pas à même d'attirer avec des prix accessibles qui feraient fuir les agents ayant la volonté de se distinguer.

La fixation d'un prix de départ semble être un véritable dilemme. Ainsi, un prix élevé peut être une stratégie non soutenable. En effet, Sony a dû diminuer le prix de sa PlayStation 3 de 100 dollars en juillet 2007 (aux États-Unis d'Amérique) et de 200 euros en octobre 2007 (en Europe) face à des ventes trop faibles.

Parallèlement à ces intérêts pratiques, la prévision des ventes de biens innovants de mode offre de nombreux intérêts méthodologiques dans le champ des sciences de gestion.

Premièrement, pour le chercheur, il est possible de se demander comment prévoir les comportements d'achat de ce type de produits : faut-il réaliser des expérimentations en laboratoire, à la manière de l'économie expérimentale ? Ou bien, est-il souhaitable de sacrifier la validité interne pour améliorer la validité externe de nos résultats, ceci en prenant des données secondaires, des séries chronologiques de ventes de biens innovants à la mode passés ? N'y a-t-il pas alors le risque d'étendre aux biens actuels des conclusions qui étaient valables dans le passé ou dans une autre région, mais qui ne le sont plus à présent ? Enfin, le chercheur doit-il faire des études de cas en suivant un groupe de consommateurs dans leur vie quotidienne afin de faire ressortir au plus près du terrain des grilles d'interprétations de leurs comportements vis-à-vis de ce type de biens ?

Deuxièmement, pour l'industriel, il existe nombre d'intérêts méthodologiques. En effet, on pourrait se demander quelle est la meilleure méthode de prévision des ventes. Doit-on réaliser celles-ci par le biais d'un modèle de régression logistique (courbe de Pearl) ? Alors, se pose dans le cas des biens innovants la question de la taille du marché potentiel pour calibrer au mieux la régression logistique : si le bien est vraiment nouveau, il est particulièrement difficile de modéliser et de prévoir les ventes futures. Doit-on alors vendre une certaine

quantité pour tester le marché sans prévision préalable, puis essayer via des modèles stochastiques ou déterministes de prévoir à très court terme les ventes futures ? Dans ce cadre, est-ce que la méthode des plus proches voisins permet d'utiliser la théorie du chaos à des fins de prévisions ? Cette méthodologie est-elle plus puissante que la prévision par simple régression ou bien en supposant que les ventes d'aujourd'hui sont égales aux ventes d'hier ?

Au-delà de ces quelques intérêts méthodologiques, on voit qu'il y a des enjeux théoriques. Est-ce que, comme l'ont mis en avant Granovetter et Soong (1986), les ventes de ce type de biens sont déterminées par les ventes passées ? Et est-ce qu'il se peut qu'il y ait un comportement chaotique dans les ventes lorsque le prix est bas comme ces deux auteurs semblaient le démontrer analytiquement ?

L'objet de notre étude sont des biens innovants pour lesquels on retrouve des phénomènes de mode. Qu'est ce à dire précisément? Les phénomènes de modes se caractérisent par des effets interpersonnels dans le cadre du comportement de consommation. Ces phénomènes ont été étudiés par Veblen (1899), Duesenberry(1949), Leibenstein (1950,1976), Granovetter et Soong(1986). Nous nous intéressons à la vision de ces derniers qui considèrent que, sur les marchés des biens innovants et/ou à la mode, « un consommateur achète un bien en fonction du nombre d'acheteurs passés » (p.83).

Nous chercherons à vérifier la présence de chaos dans une série de ventes de ces biens. Le chaos est issu d'un processus déterministe. C'est à dire qu'il existerait en l'occurrence une fonction d'évolution des ventes. Envisager cela est particulièrement difficile pour quiconque associant déterminisme et connaissance de l'évolution future. Cette association n'est pas toujours vérifiée justement parce que les systèmes déterministes non linéaires peuvent avoir un comportement complexe: le processus est alors dit chaotique et les possibilités de prévisions sont alors limitées au très court terme. On retrouve alors la remarque fondamentale de Poincaré sur la compatibilité du hasard et du déterminisme du fait de l'imprévisibilité à long terme. De plus, l'imprévisibilité peut venir du fait qu'un processus déterministe existe et que ses équations soient ignorées.

Si les ventes sont aléatoires ou stochastiques (i.e. dues au pur hasard) alors on peut faire des prévisions probabilistes, nous sommes en univers risqué. Par contre, si les ventes sont chaotiques, alors tout effort de prévision utilisant des probabilités est voué à l'échec ; nous sommes dans un univers incertain et tout raisonnement en termes de risque serait inefficace.

Eu égard aux maints intérêts que soulève notre sujet, nous avons choisi de traiter la problématique suivante: Est-ce que les ventes de produits innovants et/ou à la mode sont chaotiques?

Celle-ci permet simultanément de tester les conclusions de Mark Granovetter mais aussi de répondre à certains intérêts méthodologiques pour la réalisation du budget. De plus, répondre à cette question permettrait éventuellement de savoir si l'on peut dans ce cadre utiliser des méthodologies de prévisions probabilistes ou s'il est préférable d'utiliser d'autres méthodologies qui sortent du champ du risque. Finalement, cette question pourrait délimiter l'utilité des raisonnements en termes de risques et de probabilités.

L'étude du comportement des ventes de produits innovants et/ou à la mode fera apparaître dans un premier temps une présentation de la méthodologie utilisée pour la détection du chaos (1.1.) puis les résultats de la recherche de chaos pour la série étudiée (1.2.). Dans un second temps, nous montrerons les études réalisées pour améliorer les prévisions de vente (2.1) avant de comparer l'efficacité d'une méthode basée sur la théorie du chaos par rapport aux autres méthodes de prévisions des ventes (2.2.).

1. Les ventes de « Game Boy » sont elles chaotiques ?

Avant d'appliquer toute méthodologie, il conviendrait d'expliciter les comportements que nous allons tenter de détecter et les méthodologies ou procédures de tests servant à conclure sur la probable existence d'un processus chaotique sous-jacent à la série étudiée.

Concernant les notions de chaos et de déterminisme, il semblerait souhaitable de lire l'article de Girerd-Potin et Taramasco (1994) et l'ouvrage de Gleick(1991); ces clarifications conceptuelles sortent du cadre de la présente communication.

1.1. Méthodes de détection du chaos et d'une structure déterministe.

1.1.1. L'exposant caractéristique de Lyapunov.

Un système chaotique est caractérisé par une sensibilité aux conditions initiales. Cela revient à dire que si l'on prend deux points, aussi proches que possible, séparés par un ϵ non nul, leurs trajectoires s'écartent exponentiellement et cela pour un nombre de points et d'itérations finis. Autrement dit, dans un tel système tout espoir de prévisions est vain sauf si l'on veut faire des prévisions à très court terme.

L'un des outils les plus efficaces pour déterminer si l'on se trouve en présence de chroniques chaotiques est l'exposant caractéristique de Lyapunov.

L'exposant caractéristique de Lyapunov mesure la vitesse de divergence d'un système. Après une période de durée n , l'écart initial entre deux points séparés d'un ϵ devient $\epsilon e^{\lambda n}$, où λ est l'exposant caractéristique de Lyapunov (Hibbert et Wilkinson, 1994, p.227). L'exposant de Lyapunov mesure le taux de séparation des trajectoires dans le temps dans un espace représentant les points et leurs déplacements. La figure 1 permet d'illustrer cette définition au moyen d'une dynamique imagée. On peut par ailleurs reprendre la métaphore du pétrissage d'une pâte à pizza de Cottrell (1993, p.8) qui définit ainsi intuitivement ce qu'est l'exposant de Lyapunov : « prenez deux fèves d'origan (ou d'une autre épice que vous aimez) et placez les côte à côte sur une pâte crue aplatie. Puis, pétrissez et pliez la pâte pour réaliser une pizza. Si le mélange est chaotique, alors les deux points [fèves] s'éloignent exponentiellement l'un[e] de l'autre ».

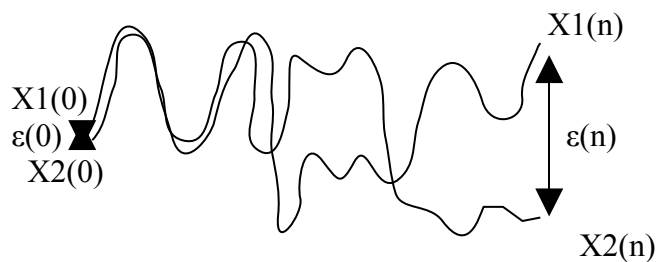


figure 1:Exemple sans modèle

A présent, il convient de présenter le calcul de l'exposant de Lyapunov $\lambda(x_0)$ qui mesure les écarts de trajectoires. Si l'on considère deux points voisins x_0 et $x_0+\epsilon$, après qu'une période se soit passée l'écart devient : $D1=|f(x_0)-f(x_0+\epsilon)|$ et le rapport de cette distance à la distance initiale est $D1/\epsilon$. Après deux périodes, nous avons un nouvel écart : $D2=|f[f(x_0)]-f[f(x_0+\epsilon)]|$, et donc le rapport de cette distance à la distance initiale devient alors $D2/\epsilon = D2/D1 \cdot D1/\epsilon$.

Après n période, nous avons donc une nouvelle distance¹ : $Dn=|f^n(x_0)-f^n(x_0+\epsilon)|$, et un nouveau rapport à cette distance initiale : $Dn/\epsilon = Dn/D_{n-1} \cdot D_{n-1}/D_{n-2} \dots D2/D1 \cdot D1/\epsilon$. (1)

1 En prenant la notation : $f^2(x)=f[f(x)]$, $f^3(x)=f\{f[f(x)]\}$, etc

Le dernier rapport permet d'exprimer le facteur(λ) avec lequel s'est amplifié l'écart initial ε . Il suffit donc de calculer ce produit (1) donnant le comportement d'un écart initial. Comme le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes nous avons :

$$e^{n\lambda} = |D_n/\varepsilon| \Leftrightarrow n\lambda = \ln|D_n/\varepsilon| \Leftrightarrow \lambda = 1/n \cdot \sum \ln|D_i/D_{i-1}|$$

On interprétera alors l'exposant de Lyapunov de la façon suivante:

-Lorsque $\lambda < 0$, le système attire vers un point fixe stable, ou vers une orbite, un attracteur périodique stable. Une valeur négative de l'exposant signifie que l'on se trouve en présence d'un système dit dissipatif ou non-conservatif. Plus l'exposant est négatif, plus le système est dit à grande stabilité. Un processus stochastique évolue autour de sa moyenne, il sera donc stable puisque les trajectoires évoluent toujours à proximité l'une de l'autre autour de la moyenne du processus stochastique. Dans ce cadre, des prévisions probabilistes sont possibles.

-Lorsque $\lambda = 0$, un système avec un tel exposant est conservatif. On dit que le système montre une « stabilité au sens de Lyapunov ».

-Lorsque $\lambda > 0$, dans ce cas l'orbite est instable et chaotique. Des points, au départ très proches, divergent lors de l'évolution dans le temps du modèle, vers des valeurs « arbitraires ». La représentation graphique d'un tel cas de figure est semblable à un nuage de points sans aucune trajectoire distincte (Vialar, 2005). Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif alors toute volonté de prévision des ventes au-delà du très court terme semble illusoire puisqu'il y a une sensibilité aux conditions initiales. Les ventes futures sont incertaines à long terme et non estimables par un calcul probabiliste.

Il semblerait alors que l'exposant de Lyapunov pourrait nous fournir, dans ce cadre précis, une délimitation entre le risque et l'incertitude.

Nous verrons ensuite qu'une estimation de l'exposant maximum de Lyapunov nous sera utile pour détecter un éventuel chaos déterministe dans notre série. Nous passerons alors par la méthodes de Wolf et al.(1985).

Présentons maintenant un second test, le test B.D.S. ; ce test non paramétrique permet de tester l'hypothèse de linéarité du système sous-jacent à une série temporelle.

1.1.2. Test de Brock, Dechert et Scheinkman(BDS) de l'hypothèse de linéarité contre une hypothèse non spécifiée.

Dans la littérature, nous trouvons de nombreux tests de linéarité: Keenan (1985), Granger et Newbold (1976) qui n'affectent pas de forme particulière à la non linéarité. Le test BDS plus récent semble plus intéressant. Il est souvent mis en avant comme plus puissant pour pouvoir inférer, sur la base d'une procédure, l'existence ou l'absence d'existence d'une structure déterministe.

Cette statistique de test non paramétrique mise en avant par Brock et al. (1991) repose sur l'intégrale de corrélation d'une série (Grassberger et Procaccia, 1983). Elle permet de tester l'hypothèse nulle qu'une chronique est indépendante statistiquement et identiquement distribué –IID- contre une alternative non spécifiée du type structure linéaire ou pas.

Prenons une série d'observations x_t représentant l'état d'un système régi par une équation de la forme $x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-n})$ où n est le nombre d'observations et f une loi inconnue de marche des variables d'états inconnues.

L'ensemble des n coordonnées caractérisant un système de ce type à un instant t est considéré comme un ensemble de points dans un diagramme de phases de dimension n .

Le plongement de la série x_t est la substitution de l'espace des observations par l'espace reconstruit à partir des dérivées successives du signal x_t . On étudie les propriétés de ce

système dynamique dans l'espace des phases en faisant croître la dimension de plongement notée m (cela est possible grâce au théorème de plongement démontré par Takens, 1981).

L'intégrale de corrélation mesure la probabilité pour que deux points de la chronique dans l'espace des phases, que l'on reconstruit avec la dimension m du plongement, soient « proches » (selon une distance inférieure à une quantité ε donnée). La formule de l'intégrale de corrélation pour la chronique $x_t = x_1, x_2, \dots, x_n$ est:

$$c(\varepsilon, m, n) = \frac{1}{n_m \cdot (n_m - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} I(x_i^m, x_j^m, \varepsilon)$$

où $n_m = n - m + 1$, $i \neq j$, $m > 1$, ε un paramètre arbitrairement choisi représentant la distance maximale pour que deux points soient définis comme « proches » (souvent l'écart type ou 1,5 de l'écart-type de x_t).

Enfin, $I(\cdot)$ est une fonction d'Heaviside prenant la valeur unité si et seulement si la distance euclidienne entre x_i^m et x_j^m est inférieure à ε .

Plus simplement, il s'agit de réaliser un tableau de comparaisons de la distance entre tous les points de la série un à un. Lorsque la distance entre deux points est inférieure à un epsilon donné alors on inscrit dans la case correspondant au croisement de ces deux valeurs la valeur 1. Autrement, nous y inscrivons la valeur 0. Enfin nous établissons une moyenne de ces valeurs : l'intégrale de corrélation. Somme toute, cette intégrale mesure la probabilité que deux points de la série soient séparés d'une certaine distance ε l'un de l'autre.

1.1.2.1. Calcul de la dimension de corrélation

Sur cette base, on peut définir la dimension de corrélation en remarquant que, pour des petites valeur de ε , $C_m(\varepsilon, m, n)$ croit exponentiellement (Grassberger et Procaccia, 1983), soit:

$$\frac{\ln c(\varepsilon, m, n)}{\ln(\varepsilon)}$$

Alors, $\ln c(\varepsilon, m, n) \approx d_m \ln(\varepsilon) \rightarrow \ln c(\varepsilon, m, n) \approx \ln \varepsilon^{d_m}$ et $c(\varepsilon, m, n) \approx \varepsilon^{d_m}$.

Il semblerait aussi que l'intégrale de corrélation $c(\cdot)$ évolue comme ε^{d_m} . Quand on augmente la dimension de plongement m , on obtient pour différents m une dimension d_m . On s'aperçoit alors que d_m converge vers une valeur d_c appelée dimension de corrélation. On définit celle-ci de la façon suivante:

$$\frac{\partial \ln c(\varepsilon, m, n)}{\partial \ln(\varepsilon)}$$

En pratique, il semblerait souhaitable de suivre la procédure suivante (Bourbonnais et Terraza, 2004):

- on prend des m_i de plus en plus grands $i=1, \dots, 20$;
- pour chaque m_i , on calcule l'intégrale de corrélation $C(\varepsilon, m, n)$;
- par les moindres carrés ordinaires, on estime le modèle suivant:

$$\ln c(\cdot) = k + p_i \ln \varepsilon_j + u_i$$

où p_i est une estimation de la dimension de corrélation d_c (avec u_i i.i.d. et k une constante).

Compte tenu de ce que l'on vient de voir, il en résulte que:

- si la courbe des estimateurs $f: m \rightarrow p_i$ (ou $p_i(m)$) évolue linéairement avec m , on en conclut que le processus x_t est stochastique.
- Si la courbe sature au-delà d'une valeur notée m^* , cela signifie qu'une structure, sous-jacente à x_t , chaotique déterministe pourrait exister.

Finalement, la dimension de corrélation (que l'on nomme aussi, par abus de langage, dimension fractale) est une estimation de la dimension fractale qui mesure l'évolution de cette probabilité que deux ventes soient séparées au plus d'un ε , qu'est l'intégrale de corrélation,

lorsque cette distance ε diminue. Un bruit blanc (par nature stochastique) remplit totalement l'espace dans lequel il se trouve quelle que soit la dimension de représentation. Aussi, lorsque nous sommes en présence d'un bruit blanc, alors la dimension de corrélation croît indéfiniment. Inversement, un système déterministe (chaotique ou non) a une dimension stable et faible quelque soit l'espace dans lequel on le représente puisque les corrélations entre les éléments du système sont fixés. Brock et al.(1991, p.17) soulignent que « lorsque nous parlons de « chaos à faible dimension », nous pensons que leur dimension de corrélation est substantiellement inférieure à 10 et peut être 6 ou 5 ». m^* permet donc de donner une estimation de la dimension de corrélation et nous indique donc la dimension de notre dynamique (ou une valeur très grande lorsque la série est aléatoire). Nous savons, par exemple, qu'un point a une dimension de zéro, qu'une ligne a une dimension de un, qu'une surface plane a une dimension de deux et enfin qu'un cube a une dimension de trois (Van de Ven et Cheng, 1996, p.603).

1.1.2.2. Le test de linéarité de Brock, Dechert et Scheinkman.

Le test considère que:

$$\begin{aligned} & \text{si } n \rightarrow \infty, \text{ alors } C_m(\varepsilon) \rightarrow (C_1(\varepsilon))^m, \\ & \text{et} \\ & \sqrt{n} \cdot [C_m(\varepsilon, m, n) - (C_1(\varepsilon, 1, n))^m] \rightarrow N(0, \sigma_m^2), \end{aligned}$$

Cela signifie que lorsque la longueur de la chronique devient indénombrable, alors $C_m(\varepsilon)$ tend vers $(C_1(\varepsilon))^m$. De surcroît, le numérateur de la statistique de BDS converge en loi vers une loi normale $N(0, \sigma^2)$.

Il vient alors la statistique de test de BDS:

$$W = \frac{\sqrt{n} \cdot [C_m(\varepsilon, m, n) - (C_1(\varepsilon, 1, n))^m]}{\sigma_m(\varepsilon)}$$

Lorsque n tend vers l'infini si la distribution de W est une loi normale centrée réduite $N(0,1)$, alors les x_t^m sont IID.

Passons aux limites de ce test. Il ne faut pas croire, de manière hâtive, que ce test permet de conclure à la présence de chaos dans une série. Il permet simplement d'accepter ou non l'hypothèse d'indépendance des termes d'une chronique et ne peut servir à la mesure ou à l'évaluation d'un chaos déterministe.

Par conséquent ce test permet, dans le cas d'un rejet de l'hypothèse H_0 , de conclure sur la non linéarité de la série.

Par ailleurs, ce test ne s'utilise que lorsqu'on a, au préalable, « stationnarisé » la chronique de départ et supprimé toutes les dépendances linéaires que pourrait contenir la chronique. Cela signifie que l'on ne prendra que les résidus d'un ARMA(p,q) réalisés sur la chronique des x_t .

En résumé, pour pouvoir conclure il semble souhaitable d'utiliser, une fois que l'on a trouvé une absence de linéarité, le calcul du premier exposant de Lyapunov qui pourra éventuellement nous renseigner sur le fait que la chronique est dissipative, stationnaire au sens de Lyapunov ou chaotique. Lorsque l'exposant est positif, nous sommes apparemment en présence de chaos déterministe. En revanche, Lorsque le premier exposant de Lyapunov est négatif et l'estimation de la dimension de corrélation infinie, il faut alors faire un test résiduel de validation de Brock(1986) afin de trancher sur la nature stochastique ou chaotique de notre série. Ce test ne permettant pas forcément de trancher, il faut faire appel au test du mélange aléatoire de Scheinkman et LeBaron (1989).

1.1.3. Éléments méthodologiques pour trouver du chaos dans une série chronologique.

Lardic et Mignon(2002) soulignent, à juste titre, que les tests que l'on vient de voir permettant la détection de chaos (dimension de corrélation et exposant de Lyapunov) ne sont pas des tests statistiques au sens strict. Aussi, les chercheurs en statistiques ont été amenés à développer des tests de validation statistique de ces mêmes tests de détection. Ils se sont heurtés à de nombreux problèmes, parmi lesquels:

- des problèmes de mesure,
- des problèmes de présence de bruits dans une série chaotique,
- des problèmes d'agrégation des données,
- des problèmes dûs à la longueur limitée des séries temporelles, surtout en sciences sociales.

En somme, « il est primordial pour les statisticiens de construire un corps de théories des dynamiques chaotiques [, corps] qui reste encore aujourd'hui à élaborer, malgré de nombreuses contributions actuelles. » (Vialar, 2005 p.234). En conséquence, il faudra prendre nos conclusions avec beaucoup de précautions.

Nous allons présenter les procédures statistiques en usage: le test résiduel de Brock et le test du mélange aléatoire de Scheinkman et LeBaron(1989) puis deux procédures utilisées en économie et en gestion.

1.1.3.1. Test résiduel de Brock.

Le point de départ de Brock(1986) est la relation suivante:« La transformation linéaire d'un système déterministe conserve ses propriétés à l'identique ». Un modèle autorégressif (de type AR(p) ou ARMA (p,q)) qui a vocation à mettre en lumière une structure explicative déterministe, devra donc avoir un exposant caractéristique de Lyapunov et une dimension de corrélation de ses résidus semblables à ceux de la chronique de départ x_t . Si ce postulat est vérifié, alors la série sera dite déterministe.

Mais, dans de nombreux cas, il se peut que l'on arrive à deux conclusions contradictoires. L'exposant de Lyapunov indique que le processus sous jacent est chaotique et l'estimation de la dimension de corrélation indique un processus stochastique (ou l'inverse). En l'occurrence, il apparaîtrait nécessaire de faire appel au test de mélange aléatoire de Scheinkman et LeBaron(1989) pour déterminer la nature de cette série.

1.1.3.2. Le test de mélange aléatoire de Scheinkman et LeBaron (1989).

L'idée des auteurs est d'appliquer un mélange aléatoire $m(.)$ à la série initiale pour détruire l'éventuelle structure déterministe qu'elle possède. Si la série mélangée perd sa structure, on aura:

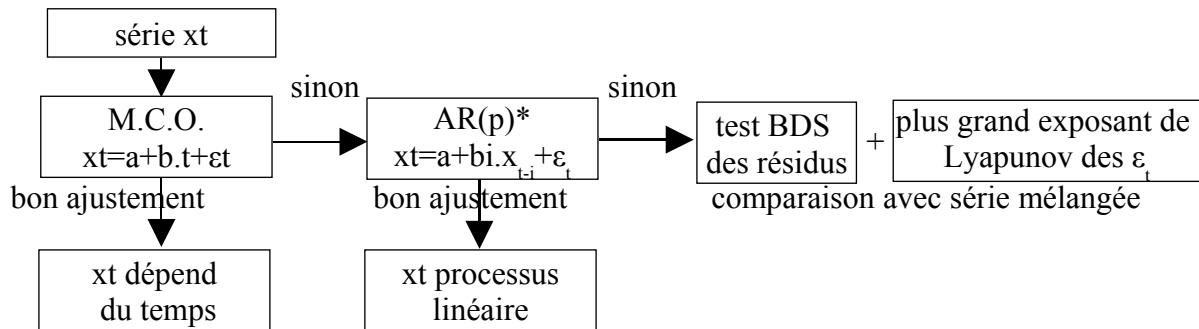
$$\lambda_{m(x)} < \lambda_x \text{ et } dc_{m(x)} > dc_x$$

Et l'on pourra donc conclure que la série est déterministe puisque le mélange accroît la dimension de corrélation (en principe faible en présence de chaos) et que ce mélange a diminué l'exposant de Lyapunov (en principe, élevé et supérieur à l'unité lorsqu'il y a du chaos).

Passons maintenant, une fois mis en avant ces tests de confirmation, aux différentes procédures utilisées en économie et en gestion pour analyser le potentiel chaotique d'une série.

1.1.3.3. Les procédures de test de l'hypothèse de chaos dans une série.

Cette procédure (fig.2) aboutit, après blanchiment de x_t , à l'analyse simultanée du test BDS et du premier exposant de Lyapunov. Si le test BDS indique de la non linéarité et que l'exposant de Lyapunov le plus élevé est positif; Thietart et Forgues (1997) nous conseillent, pour dépasser la trappe qu'évoque Brock(1986), de comparer nos résultats avec ceux obtenus sur notre série mélangée (Scheinkman et LeBaron, 1989). Dans les autres cas, il semble souhaitable de conclure qu'il n'y a pas de chaos dans notre série. Ils soulignent que, pour des séries de taille limitée, un chaos peut apparaître dans un processus aléatoire, d'où l'intérêt de faire la comparaison avec un mélange des données de la chronique initiale.



* on retient p pour avoir le meilleur ajustement.

Figure 2: Procédure de détection de Thietart et Forgues(1997)

Présentons une autre procédure (fig. 3) qui à l'avantage d'utiliser deux tests de détection de chaos (dimension de corrélation et premier exposant de Lyapunov) ce qui renforce la validité des résultats. Cela justifiera que nous utilisons une autre procédure finale puisque le test de confirmation de Brock (1986) n'est apparemment utile que dans le cas où les deux tests de détection donnent des résultats non-contradictaires, ce qui n'est pas prévu dans la fig. 3 (page suivante).

Nous utiliserons cette procédure pour vérifier l'existence du chaos car elle permet une double vérification. Cette double vérification sera l'occasion de montrer qu'il existe des cas où l'on ne peut trancher clairement avec le test de vérification de Brock ou le test de mélange aléatoire. Montrons à présent sur les ventes hebdomadaires de Game Boy au Japon ce qu'il en est.

1.2. Les ventes de « Game Boy » au Japon: un processus déterministe non chaotique.

Le choix d'un bien innovant et/ou à la mode est particulièrement difficile. Le cas des ventes de consoles de jeux nous a paru intéressant parce qu'il permettait d'avoir un bien de mode disponible sur longue période tout en disposant de données hebdomadaires. Par ailleurs, le choix du Japon s'explique parce que c'est le pays où a émergé cette industrie du jeu vidéo (Nakamura et Center, 2003) et où le marché, sur une période longue (1989-2005) et sur un même bien, pouvait être particulièrement actif.

Notre série est composée de 789 données représentant des ventes hebdomadaires. Nous avons pris des données hebdomadaires car les ventes journalières sont bruitées par l'« effet week-end »: l'activité dans les commerces est, en effet, plus forte en fin de semaine. Par ailleurs le cas de la Game-Boy a été retenu car nous avons une série longue, combinée avec la possibilité de regarder un produit innovant puisque la Game Boy fut la première véritable console de jeux portable.

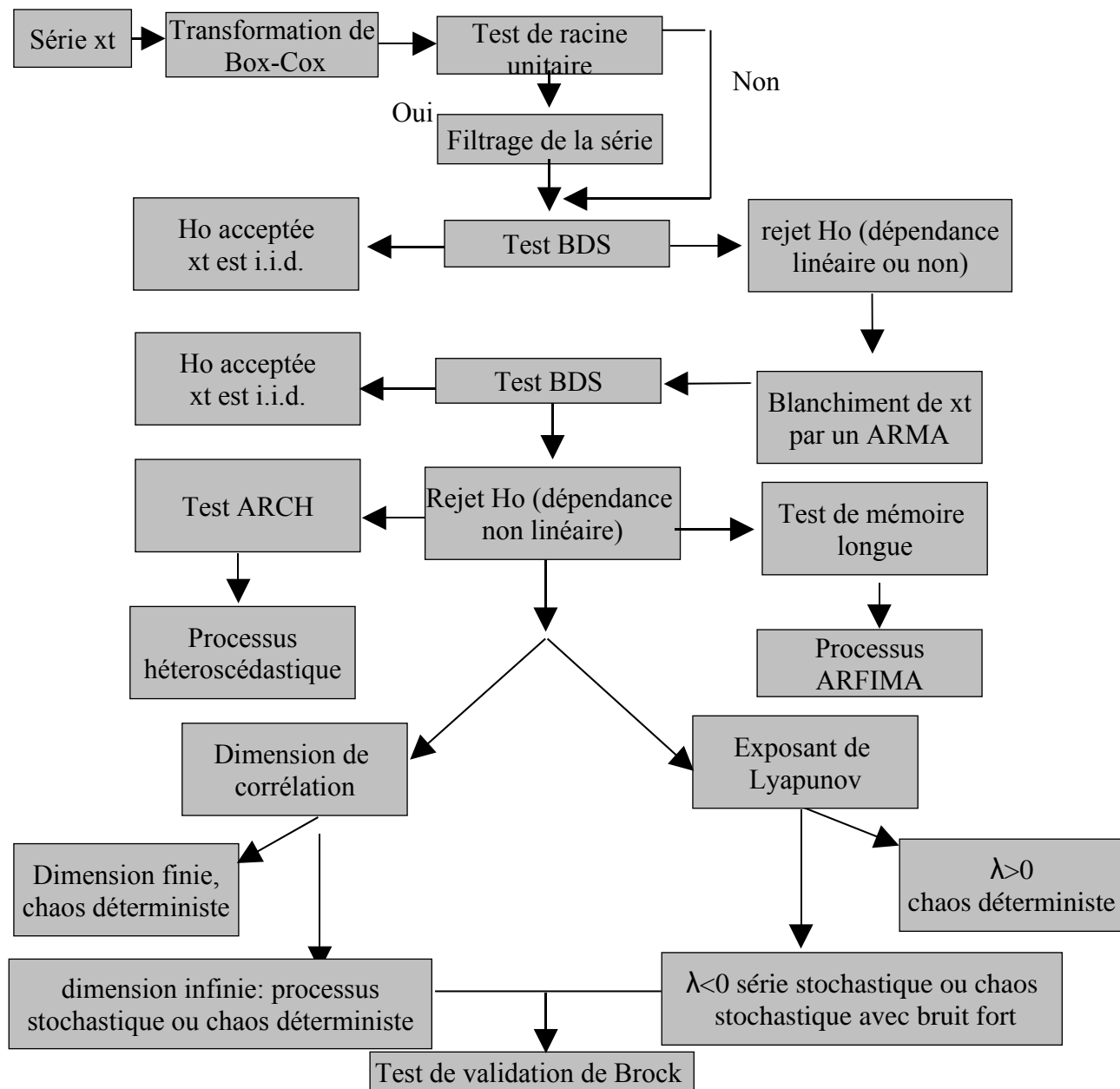


figure 3: La procédure de test de Terraza et Bourbonnais(2004)

1.2.1. Test de l'hypothèse de linéarité des ventes de Game Boy.

Avant d'interpréter les critères d'information il faut savoir que plus le critère est faible plus l'ajustement est de qualité. Le critère d'information de Akaike donne, comme modèle ARMA ayant le meilleur ajustement, un modèle AR(2): mais ceci de peu, puisque la valeur du critère est très proche de celle donnée pour un AR(1). Par contre, les critères bayésiens de Schwarz et le critère d'Hannan-Quinn trancheraient clairement en faveur d'un AR(1). Aussi, nous avons blanchi notre série en utilisant un AR(1).

AR(p)	Akaike	Schwarz	Hannan-Quinn
AR(1)	18205,2	18209,9	18207
AR(2)	18204,9	18214,2	18208,5
AR(3)	18206,8	18220,8	18212,2

Tableau 1 : critères d'information pour choisir un ARMA

Premièrement, il convient de voir si l'on peut rejeter l'hypothèse d'un processus IID pour pouvoir dire si nous sommes en présence d'une série chronologique reflet d'un processus non stationnaire, chaotique ou stochastique non-linéaire (Hsieh, 1991). La mise en œuvre du test nécessite le choix de deux éléments : la dimension m et la valeur du rapport de ε à l'écart type σ . Brock, Hsieh et Lebaron (1991) conseillent de prendre des valeurs de ε/σ de 0,5 à 1,5.

Nous allons au delà de leurs limites pour renforcer nos conclusions concernant le caractère IID ou non du processus sous-jacent aux ventes. En outre, nous faisons varier la dimension de plongement (« *embedding dimension* ») de 2 à 5 puisque c'est fréquemment le cas dans l'application de ce test en gestion (Thietart et al., 1994, 1997; Girerd-Potin et al., 1994).

ε/σ	m	2	3	4	5
0,25		3424,11	160243,38	12629859,34	1148715531,2
0,5		2348,95	75962,86	4122133,8	258085920,99
1		1775,99	43752,69	1802194,19	85640851,48
2		1220,03	20936,45	596829,93	19624388,8
4		945,78	12742,04	283504,05	7273614,4

Tableau 2 : test BDS de la série des ventes hebdomadaires.

ε/σ	m	2	3	4	5
0,25e		22106,1742	6577524,521	3319363094	1,93323E+12
0,5e		22106,1742	6577524,521	3319363094	1,93323E+12
e		21665,7051	6334367,478	3148861471	1,80651E+12
2e		21139,2188	6030580,262	2932114984	1,64527E+12
4e		20396,6802	5601618,166	2614961673	1,41558E+12

Tableau 3 : test BDS des résidus de l'AR(1).

Il semblerait que le test BDS rejette l'hypothèse d'une distribution IID des ventes de Game Boy compte tenu que la statistique BDS dépasse largement le fractile de la loi normale centrée pour un risque de première espèce α de 0,01.

Il est souhaitable à présent de tester le potentiel chaotique de notre série. En effet, le test BDS ne permet pas de trancher entre plusieurs processus non IID: distribution non stationnaire, dépendance sérielle non linéaire ou chaos. Remarquons, que les deux premières hypothèses supposent un univers aléatoire et sont donc exclusives de la troisième explication qui repose sur le déterminisme chaotique.

Aussi, il serait opportun, pour trancher entre processus aléatoire ou déterminisme, d'utiliser les outils de détection du chaos.

1.2.2. Tests de détection du chaos.

1.2.2.1. Dimension de Grassberger et Procaccia

Conformément à ce que nous avons expliqué ci-dessus, il est convenu de calculer plusieurs intégrales de corrélation pour différentes valeurs de m et de ε . Cela permet d'estimer par les moindres carrés de $\ln(\varepsilon)$ en $\ln(C_m)$ différents estimateurs de la « dimension de corrélation » d_i . Suivant la convergence (ou non) de ces estimateurs d_i en fonction de la dimension de plongement m , nous concluons que nous sommes en présence d'un processus éventuellement chaotique (resp. aléatoire).

La dimension étant, théoriquement, obtenue pour ε tendant vers zéro, il serait préférable de prendre des petites valeurs d'épsilon. D'ailleurs, des valeurs ε trop faibles pourraient donner une pente systématiquement égale à m en raison du problème du bruit (le

chaos étant parfois bruité). Inversement, si les ε sont trop élevés, le logarithme de la dimension de corrélation ($\text{Log } C(m,n, \varepsilon)$) semble (presque) toujours être nul. Il serait alors souhaitable de choisir des valeurs de ε permettant d'éviter ces deux limites. Girerd-Potin et Taramasco (1994) indiquent que la « procédure d'évaluation à suivre est purement empirique. On choisit à l'œil l'intervalle sur ε (en éliminant les valeurs les plus faibles et les plus fortes de ε) et on mesure la pente » (p.228).

Sachant que nous possédons un petit échantillon, il semblerait bienvenu de rappeler un résultat de Ramsey et Yuan (1987, 1989):

- les estimations de la dimension de Grassberger et al. (1983) seraient biaisées à la baisse pour des séries aléatoires,
- inversement, elles pourraient être biaisées à la hausse pour des chroniques issues d'un processus chaotique,
- Enfin, ces biais paraissent s'accroître avec la dimension de plongement.

Nous obtenons le graphique suivant qui indiquerait une convergence des estimations de la dimension de corrélation en fonction de la dimension de plongement. Aussi, il apparaît possible d'estimer la dimension de corrélation entre 0,003 et 0,004 (cf figure 4). En conséquence, un facteur au minimum serait nécessaire pour décrire le processus dynamique sous-jacent. Pour décrire voire prévoir les ventes de Game Boy, il paraît nécessaire de n'utiliser que les ventes passées. Il semblerait alors que l'hypothèse de Granovetter et Soong (1986) selon laquelle les ventes ne s'expliquent que par les ventes passées est validée par cette estimation de la dimension de corrélation, puisqu'un seul facteur semble nécessaire pour décrire le processus.

Cependant, la détection d'une dimension finie, à elle seule, ne permet pas de conclure que le processus est chaotique. Nous ne pouvons valider, pour l'instant, les résultats analytiques de Granovetter et Soong concernant la possible existence de chaos dans les ventes de ce type de produit. Il vaut mieux par prudence trianguler ce résultat avec le résultat d'un autre test de détection du chaos, comme le calcul du premier exposant de Lyapunov.

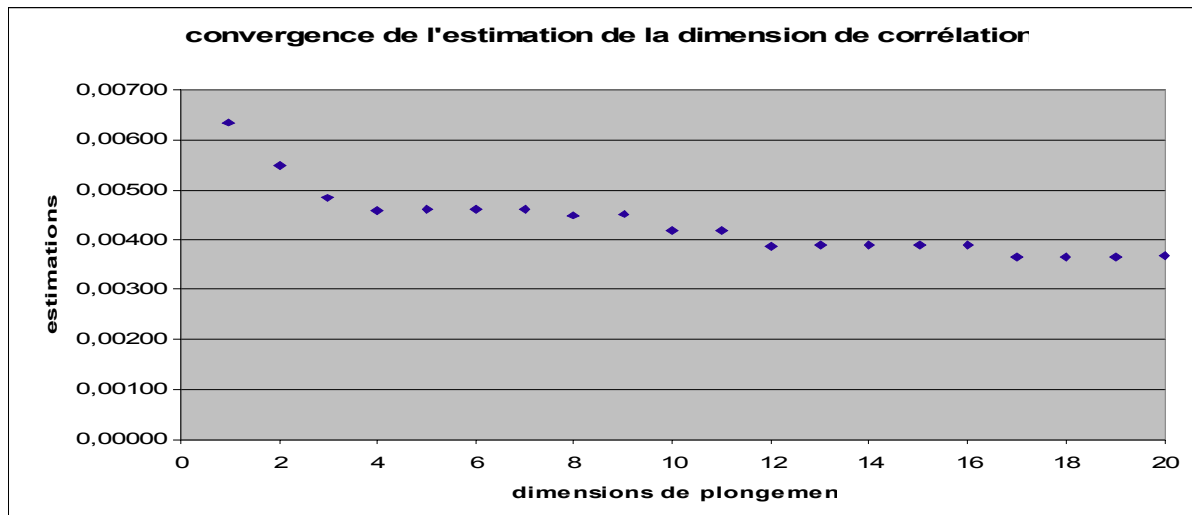


Figure 4: estimations de la dimension de corrélation.

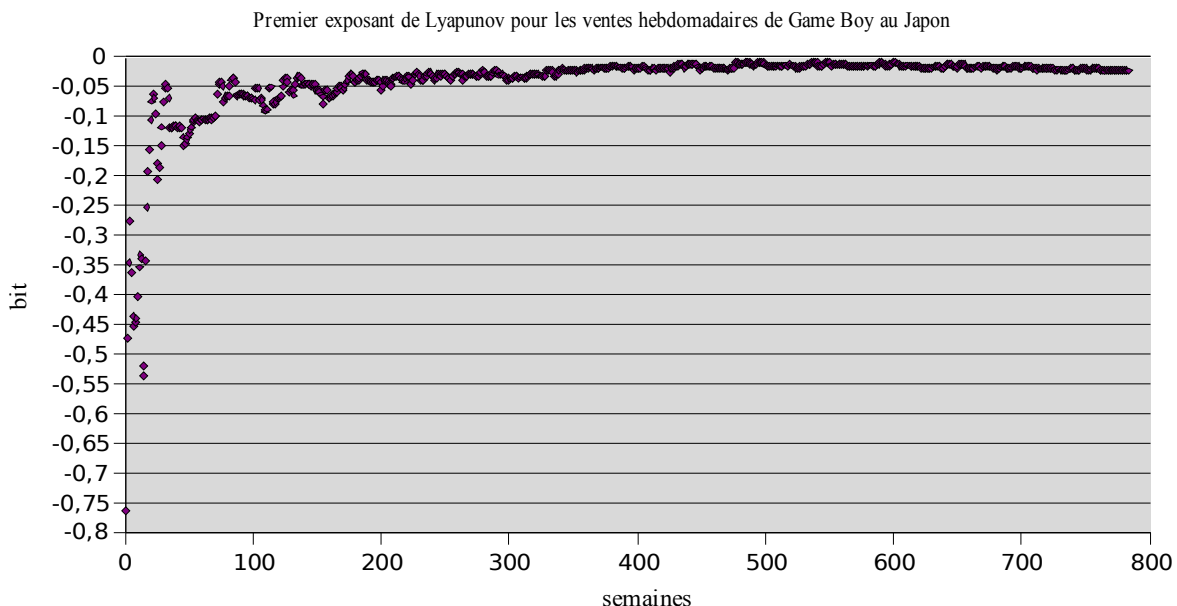
En effet, l'existence de dépendances non linéaires sur les données aléatoires ou l'insuffisance de la taille de la série peuvent être la cause de ce résultat en faveur de la présence de chaos (Girerd et Taramasco, 1994).

Par conséquent, il serait prudent de calculer le premier exposant de Lyapunov via notre algorithme en VisualBasic² reprenant celui de Wolf et al.(1986, 1991) qui est un des rares à donner de très bons résultats pour des séries chaotiques dont le premier exposant de Lyapunov est connu (Girerd-Potin et al .,1994). Si le premier exposant de Lyapunov est positif, alors nous pourrions dire que deux tests confirment l'éventualité d'un processus déterministe chaotique les ventes de Game Boy.

1.2.2.2. Calcul du premier exposant de Lyapunov.

Pour obtenir une bonne estimation du premier exposant de Lyapunov, dans un premier temps, nous avons regardé si notre algorithme en Visual Basic (ayant pour source le programme en Fortran de Wolf et al., 1985) donne des résultats satisfaisants pour des processus connus (Lorenz, Hénon...). Puisqu'il donnait des résultats proches de ceux obtenus par Wolf et al. (1985), nous avons appliqué cet algorithme pour les ventes hebdomadaires de Game Boy et pour les résidus du modèle AR(1).

Nous avons pris différentes valeurs pour la dimension de plongement, sachant que Wolf et al. (1985) conseillent une dimension supérieure à la dimension n de l'espace d'état de l'attracteur sous-jacent (estimé à 0,0036 ci-dessus). Plus précisément, elle doit être supérieure ou égale à $2n+1$ mais ne doit pas être trop grande pour que l'algorithme fonctionne correctement. Par conséquent, nous avons fait tourner l'algorithme avec plusieurs combinaisons de paramètres. Nous nous sommes aperçu rapidement que l'algorithme montrait (graphiques ci-dessous) que la dynamique n'était apparemment pas déterministe chaotique. Comme on peut le voir ci-dessous (figure 5 et 6) pour une dimension de plongement de trois ($m=3$), il apparaît que le calcul premier exposant de Lyapunov se stabilise pour une valeur de -0,008 (pour les ventes) et -0,002 (pour les résidus du modèle AR(1)).



2 Les programmes VisualBasic pour Excel pour tous les calculs réalisés dans cette communication sont disponibles auprès de l'auteur.

figure 5: estimation du premier exposant de Lyapunov des ventes

Il semblerait qu'il y ait un dilemme puisque les deux tests de détection du chaos ne donnent pas le même résultat. Il y a plusieurs explications à cela que nous verrons dans les discussions de nos conclusions.

Aussi, compte tenu de cette ambiguïté des résultats, il n'est apparemment pas possible de poursuivre la procédure de Bourbonnais et Terazza (cf. fig.3) puisque nous ne sommes pas en présence conjointe d'une dimension de corrélation infinie et d'un premier exposant de Lyapunov négatif, ce qui justifierait l'utilisation du test de confirmation de Brock (1986). De plus, nous n'avons pas, non plus, conjointement une dimension de corrélation finie et un exposant de Lyapunov positif, ce qui aurait pu nous permettre de conclure en faveur de l'existence d'un processus chaotique sous-jacent à la série étudiée.

Autrement dit, nous ne savons pas si nous sommes en univers risqué ou incertain et s'il vaudrait mieux faire des prévisions probabilistes ou celles utilisant la théorie du chaos.

En présence d'un exposant de Lyapunov négatif, il n'est pas possible d'opérer à un test de mélange aléatoire de Scheinkman et LeBaron (1989), ce qu'avaient utilisé Thietart et Forgues (1994, 1997) pour conclure en faveur de la présence de chaos dans une série des transactions au cours d'une crise diplomatique dans l'ambassade américaine d'Iran.

En conséquence, nous allons utiliser, suivant Sidorowich et Farmer(1987, 1988), la prévision comme « bon moyen de vérifier l'existence d'un processus chaotique » (Girerd-Potin et Taramasco, 1994).

premier exposant de Lyapunov pour les résidus du modèle ARMA réalisant le meilleur ajustement des ventes

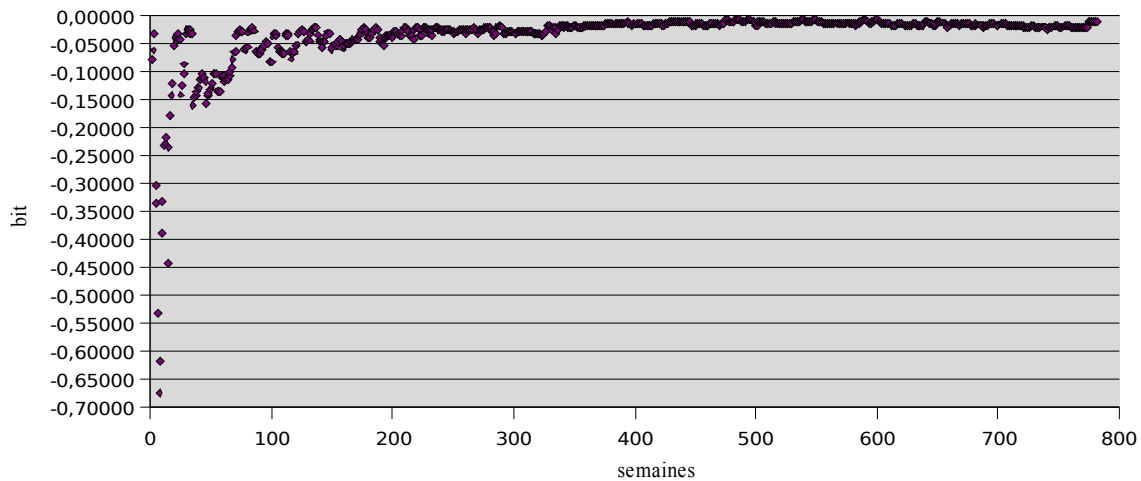


figure 6: estimation du premier exposant de Lyapunov des résidus

2. Chaos des ventes de « produits innovants de mode » et les prévisions.

2.1. Modélisation et prévisions des ventes.

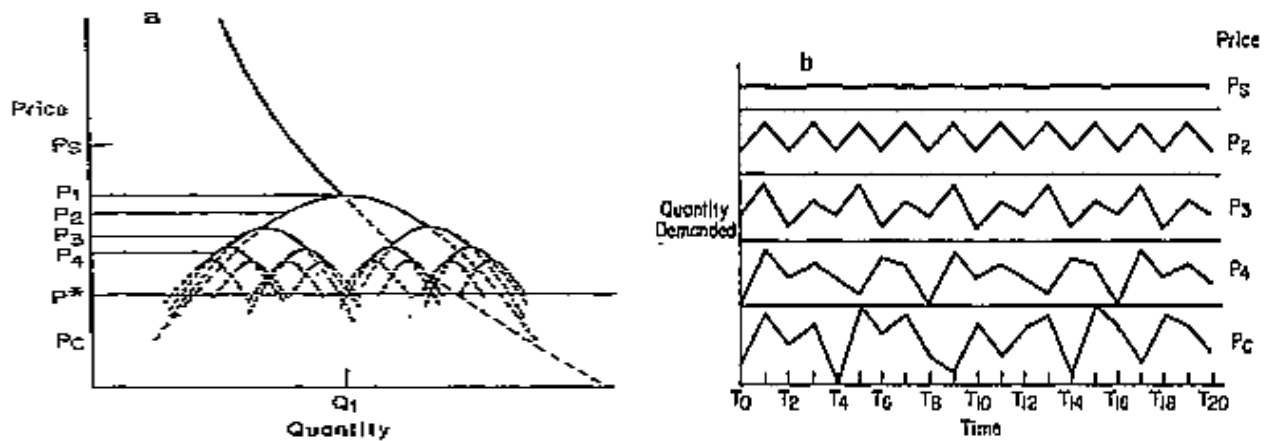
Dairymple(1987) montre qu'aux Etats-Unis, à la fin des années 1980, les entreprises utilisaient beaucoup, pour la prévision des ventes, des méthodologies à base d'inférences subjectives, d'extrapolations de type moindres carrés ordinaires ou naïves (en faisant l'hypothèse que les ventes de demain seront identiques à celles d'aujourd'hui). De plus, il met en avant que les entreprises auraient à gagner en utilisant des techniques disponibles dans des progiciels ou en estimant les variations saisonnières. Vingt ans plus tard, les prévisions des séries chronologiques de ventes ont grandement évolué puisque l'on possède nombre de techniques utilisant la logique floue, les réseaux de neurones, des algorithmes dit « génétiques » ou les méthodes de la théorie du chaos (Castillo et Melin, 2007). « Chacune de ces techniques a des avantages et des inconvénients et certains problèmes concrets furent résolus grâce à l'utilisation de ces techniques. Beaucoup de problèmes complexes concrets requièrent l'intégration de certaines de ces techniques pour parvenir à l'efficacité et à la précision requise en pratique » (Castillo et Melin, 2007 p.1147).

Dans le domaine des ventes de produits nouveaux, la prévision est un problème majeur. Premièrement, ces produits engagent l'entreprise dans des investissements importants. Deuxièmement, pour Armstrong et Brodie (1999), les erreurs de prévisions seraient plus importantes pour ce type de ventes. En effet, Tull (1967) estime que l'écart absolu moyen aux prévisions est de 60%. Cela pourrait expliquer le succès des modèles de pré-test du marché, mais Shocker et Hall (1986) montrent dans une évaluation de ces différents modèles qu'il est difficile de faire ressortir un meilleur modèle. Armstrong et Brodie (1999) mettent en avant l'idée qu'au lancement du produit il vaut mieux se fier à des estimations plus qualitatives et subjectives (« purely judgmental approaches » p.10). Tandis que, plus on s'éloigne du lancement et plus les données deviennent nombreuses sur les coûts et les ventes. C'est pourquoi, en fin de cycle de vie du produit, ils conseillent l'utilisation de méthodologies quantitatives. Mais, l'utilisation de méthodologie pour prévoir est différente selon que l'on se trouve en présence d'une série passé aléatoire (dans ce cadre il faut faire des prévisions en utilisant des probabilités puisque nous sommes en présence de risque) ou que l'on se trouve en présence d'une série au comportement chaotique (dans ce cadre, le

raisonnement en probabilité peut s'avérer contreproductif puisque nous sommes en situation incertaines par nature non probabilisable).

Concernant nos données, nous possédons l'intégralité du cycle de vie du produit. Une idée pour tester les prévisions à base chaotique est d'essayer de prévoir les 10% de la fin de série avec les 90% du début du cycle. Puis, nous incorporons à chaque nouvelle prévision (en $t+1$) la réalisation (en t) que nous avons essayé de prévoir le tour d'avant (Girerd-Potin et Taramasco, 1994). Aussi, nous n'utilisons une méthodologie quantitative que sur la fin du cycle de vie du produit conformément à ce qui est recommandé par Armstrong et Brodie(1999).

La méthodologie des plus proches voisins nous permettra de tester la conclusion générale du modèle de Granovetter et Soong(1986): les ventes sont stables pour un haut niveau de prix, puis bifurquent pour un niveau de prix inférieur. Donc, les ventes évoluent selon un cycle à deux temps (2-cycle), puis le processus pour différents niveaux de prix rencontre différentes bifurcations (on a successivement un 4-cycle, un 8-cycle, un 16 cycle...) et cela jusqu'à une bifurcation de Hopf (pour un prix p^*) qui fait basculer le système dans un comportement chaotique pour des niveaux de prix p inférieurs ou égaux à p^* (cf. fig. 7).



Source: Granovetter et Soong (1986, p.94)

Figure 7: comportement des ventes dans un modèle à seuil.

2.2. Le chaos à l'épreuve de sa capacité prédictive.

Avant tout, il serait opportun d'indiquer que même si le chaos est imprévisible à long terme (car il est caractérisé par une forte sensibilité aux conditions initiales), il devrait être possible de faire mieux que le hasard sur la prédiction à très court terme si le processus sous-jacent à la série est chaotique. Nous présentons dans un premier temps la méthodologie utilisée pour ce faire, avant de présenter les résultats concernant les ventes de Game Boy au Japon.

2.2.1. Méthodes de prévisions à très court terme par les plus proches voisins

Pour nos prévisions, il serait convenu, eu égard aux travaux ayant utilisés la conjecture de Farmer et Sidorowich(1987, 1988), d'utiliser la méthode des plus proches voisins pour émettre des prévisions de t à $t+s$. Cette méthodologie utilise, à des fins de prédiction dans un premier temps, une recherche du plus proche voisin dans la série disponible des m -historiques. Dans un second temps, il s'agira de faire une prévision à s période(s) en prenant l'historique situé à s période(s) du plus proche voisin.

On peut améliorer la méthode en prenant plusieurs proches voisins. Partant, on fera une moyenne des prédictions en fonction de la proximité de ces plus proches voisins: le poids accordé dans la moyenne pondérée sera d'autant plus élevé que le « voisin » est proche.

Nous utiliserons cette méthodologie et son amélioration, même s'il existe d'autres méthodes utilisant des interpolations linéaires, quadratiques, cubiques... (Casdagli, 1989), car elles ont le mérite d'être simple d'utilisation pour une qualité de résultats proche.

2.2.2. Prévisions à très court terme par les plus proches voisins comparées à la prévision naïve.

En utilisant la méthode du plus proche voisin et du plus proche voisin moyen, les tentatives de prédiction sur les ventes hebdomadaires de Game Boy se sont soldées par un échec.

En effet, nous voyons sur la figure 8 que la qualité de la prédiction, même en supprimant des points aberrants, est loin d'être très bonne puisque le coefficient de détermination est de 0,59 entre les prévisions et les réalisations avec la méthode des plus proches voisins et de 0,65 pour la méthode du plus proche voisin moyen. Pour bien juger la qualité des prédictions, il faut les comparer aux prédictions naïves (fig. 9). Nous voyons que la qualité de la prévision est meilleure en faisant l'hypothèse que les ventes d'aujourd'hui seraient égales à celles d'hier puisque nous obtenons un coefficient de détermination supérieur ($r^2=0,66$).

Somme toute, la conclusion de Granovetter et Soong (1986), selon laquelle: les ventes des produits innovants et / ou de mode sont cycliques ou chaotiques, ne serait pas vérifiée dans le cas des ventes de Game Boy au Japon. Il apparaît possible suite à ce test de rejeter l'hypothèse d'un processus chaotique sous-jacent aux ventes de Game Boy puisque selon Sidorowich et Farmer (1987) la prédiction est un bon moyen de vérifier l'existence d'un processus chaotique. Or dans le cas étudié, la prédiction a permis de montrer l'inexistence d'un processus chaotique, bien que notre résultat soit discutable.

Les ventes de ce produit innovant de mode n'étant pas chaotique, il semblerait que l'univers des ventes de produits innovants et/ ou à la mode est risqué. Ce résultat restaure l'utilité d'une analyse en termes de risques et de probabilités pour analyser et prévoir les ventes de ce type de biens. Nous en venons à notre conclusion et à nos discussions.

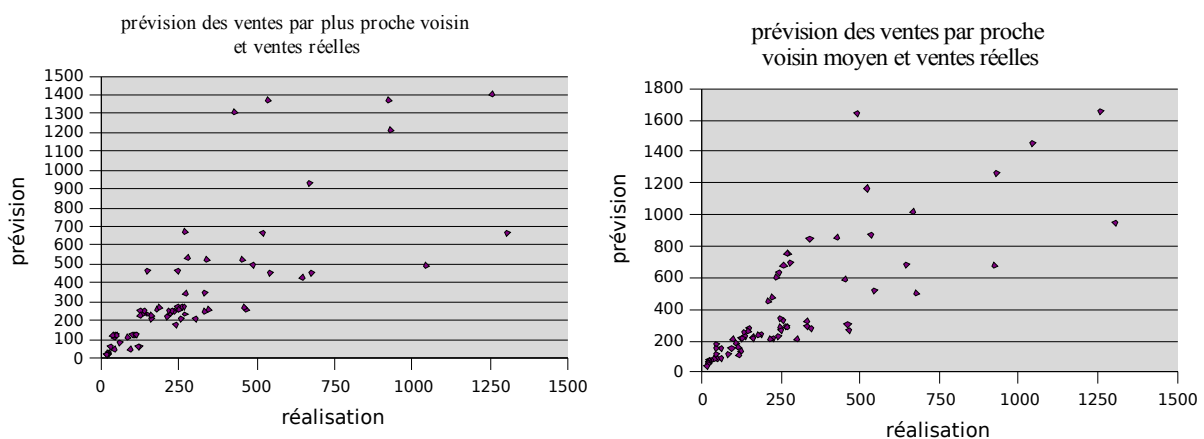


Figure 8: tests graphiques de qualité des prédictions par proche voisin ($r^2=0.59$ et 0.65)

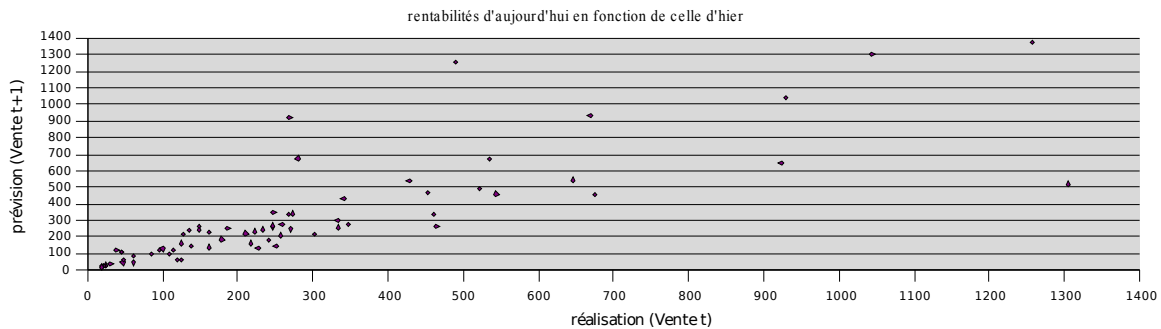


Figure 9: test graphique de la qualité des prévisions naïves ($r^2=0,66$)

Conclusion.

Finally, after having put forward the methodology and a triangulation of two tests of detection of chaos for the weekly sales of a new fashion product, we have tried to overcome a methodological impasse by testing the predictive capacity of chaos. Also, it would seem that the Granovetter and Soong model is not able to explain the sales of Game Boy in Japan since there would probably be no cyclicity or chaos in this time series. Nevertheless, it would be prudent to have longer time series to confirm this result, as the idea of detecting chaos with 789 data points seems debatable. In addition, it would be interesting to move away from an analysis of a single product and to see if this absence of chaos or cycle is also found for other products with the same characteristics.

However, if our conclusions were to be validated in other works, then it would seem that one could draw interesting managerial implications. First, at the theoretical level it seems desirable to model the sales of fashion products as a risky and random process. This restores the utility of a probabilistic analysis to measure and predict the risks inherent in the sale of these products.

Secondly, the result obtained on the comparison of the predictive power of chaotic forecasts and naive anticipations seems to favor the use of intuition or very simple rules rather than complex models when we are in the presence of risks.

Bibliographie non exhaustive (suite auprès de l'auteur).

ARMSTRONG J. et BRODIE R. (1999), "Forecasting for Marketing", dans Hooley G. et M. Hussey, *Quantitative Methods in Marketing*, International Thomson Business Press.

BOURBONNAIS R. et TERRAZA M. (2004), *Analyse des séries temporelles: applications à l'économie et à la gestion*, Dunod.

BROCK W. (1986), "Distinguishing random and deterministic systems: Abridged version", *Journal of economic theory*, vol.40, n°1.

BROCK W., DECHERT W.D., SCHEINKMAN J. et LEBARON B.(1991), "A test for independence based on the correlation dimension", *Econometric Reviews*, vol.15, n°3.

BROCK W, HSIEH D., LEBARON B. (1991), *A Test of Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Theory and Evidence*, MIT Press.

CASDAGLI M. (1989), "Nonlinear prediction of chaotic time series", *Physica D*, vol.35, n°3.

CASTILLO O. et MELIN P. (2007), "Preface to the special issue on soft computing for time series prediction", *Applied Soft Computing Journal*, Vol.7, n°4.

- DAIRYMPLE D.(1987), “Sales forecasting practices: Results from a United States survey”, *International Journal of Forecasting*, vol.3, n°3.
University Press, Cambridge.
- GIRERD-POTIN I. et TARAMASCO O. (1994), “Les rentabilités à la bourse de Paris sont-elles chaotiques?“, *Revue économique*, vol.45, n°2.
- GLEICK J.(1991), *La théorie du chaos* , Flammarion.
- GRANOVETTER M. et SOONG R. (1986), “Threshold Models of Interpersonal Effects in Consumer Demand” , *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol.7, n°1.
- GRASSBERGER P. et PROCACCIA I.(1983), “Characterization of Strange Attractors”, *Physical Review Letters*, vol.50, n°5.
- SCHEINKMAN J. et LEBARON B. (1989), “Nonlinear Dynamics and Stock Returns“, *Journal of Business*, vol. 62, n°3
- SIDOROWICH et FARMER (1987), “Predicting chaotic time series”, *Physical Review Letters*, vol. 59, n°8.
- THIETART R. et FORGUES B. (1997), “Action, Structure and Chaos“, *Organization Studies*, vol.18, n°9.
- VIALAR T. (2005), *Dynamiques non linéaires chaotiques en finance et économie*, Economica.
- WOLF A., SWIFT J.B., SWINNEY H.L. et VASTANO J.A. (1985), “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series“, *Chaotic Oscillators: Theory and Applications*, vol.160.